

Електронний журнал «Ефективна економіка» включено до переліку наукових фахових видань України з питань економіки (Категорія «Б», Наказ Міністерства освіти і науки України № 975 від 11.07.2019). Спеціальності – 051, 071, 072, 073, 075, 076, 292. Ефективна економіка. 2023. № 11.

DOI: <http://doi.org/10.32702/2307-2105.2023.11.47>

УДК 331.1: 519.7: 658.3

*А. В. Серіков,
к. ф.-м. н., професор, викладач,
Харківський соціально-економічний фаховий коледж, м. Харків
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-0629-2716>*

ПРО ОСОБЛИВОСТІ РОЗБУДОВИ СИНЕРГЕТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

*A. Sierikov,
PhD in Physico-Mathematical Sciences, Professor, Lecturer,
Kharkiv Socio-Economic Professional College, Kharkiv*

ON THE PECULIARITIES OF DEVELOPING SYNERGISTIC MANAGEMENT OF SOCIO-ECONOMIC SYSTEMS

Статтю присвячено пошуку шляхів для повноцінного аналізу особливостей розбудови синергетичного управління соціально-економічними системами. Для досягнення заявленої цілі використовується математичне моделювання як найбезпечніший вид будь яких досліджень соціально-економічних середовищ. Наголошується, що в опублікованих дослідженнях питань з синергетичного управління соціально-економічними системами, які нелінійні за своєю суттю, зовсім не формується завдання на досягнення бажаного сценарію взаємодії між елементами-антагоністами системи.

Таке управління повинне бути ненасильницьким і тому заснованим на вигідному використанні природної суті процесів в самій системі, які треба попередньо досконально вивчати і фіксувати, наприклад, у вигляді фазових портретів. Результати управління, що претендує на звання синергетичного, повинні мати доказову базу у вигляді відповідного фазового портрету. Таке завдання ускладнюється тим, що з-за відсутності якихось узагальнених методів побудови макрозмінних, котрі потім забезпечують створення бажаних атракторів за рахунок редукції надлишкових ступенів свободи в системі, яка підлягає управлінню, дуже важко сподіватися, що воно насправді буде синергетичним. Завдання створити синергетичне управління непомірно ускладнюється, якщо треба враховувати широкий спектр уподобань при прийнятті управлінських рішень власниками і носіями «працюючого» на соціально-економічний результат капіталу.

The article is devoted to finding ways for a full analysis of the peculiarities of developing synergistic management of socio-economic systems. Management is generally understood as a purposeful impact on the object of management with the aim of transferring it from the previous state to the desired one (new or maintaining it in a stable mode). In socio-economic systems, which include all business entities, two subsystems are distinguished, respectively: the one that manages and the one that is subject to management. To achieve the stated goal, mathematical modelling is used as the safest type of any research on socio-economic environments. This paper focuses on a management model with the conventional name "commonwealth", within which an operation to change the state of the system becomes the result of the interaction of both subsystems. The processes to be controlled are described by systems of nonlinear differential equations, the solution of which is obtained by the method of approximate graphical integration. This allows us to build approximate phase portraits of the studied dynamic socio-economic systems. To achieve this goal, the computer algebra package "Mathematica 7" was used in this work. An analysis of previously published studies in this area has shown that they did not formulate the

task of achieving the desired scenario of interaction between antagonistic elements of dynamic systems. It is clear that such management should be non-violent and therefore based on the beneficial use of the natural essence of processes in the system itself, which must first be thoroughly studied and recorded, for example, in the form of phase portraits. In general, the results of management that claims to be synergistic should have an evidence base in the form of a corresponding phase portrait. The performance of such tasks is complicated by the fact that there are no generalised methods for constructing macro-variables, which then ensure the creation of the desired attractors. This is achieved by reducing excessive degrees of freedom in the system to be controlled. Under such conditions, it is very difficult to hope that management will actually be synergistic. The task of creating synergistic management is exorbitantly complicated if one has to take into account a wide range of preferences when making management decisions by owners and holders of capital that "works" for the socio-economic result.

Ключові слова: математичне моделювання, господарська діяльність, динамічна соціально-економічна система, фазовий портрет, синергетичне управління.

Keywords: mathematical modelling, economic activity, dynamic socio-economic system, phase portrait, synergistic management.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. Під управлінням взагалі розуміється цілеспрямований вплив на об'єкт управління з метою його переведу із попереднього стану в бажаний (новий або підтримання в сталому режимі). Таке завдання можна відобразити наступним символічним описом [1]

$$[S_1, RS] \rightarrow \frac{Q(I)}{P \triangleright p; T \triangleleft t} \rightarrow [S_2, RT, BT], \quad (1)$$

де S_1, S_2 - відповідно поточна та бажана ситуації, RS - ресурси будь-якої природи, що витрачаються на здійснення цілеспрямованого переходу $S_1 \Rightarrow S_2$;

RT, BT – бажаний та побічний (непередбачуваний) результати відповідно; P і T – ймовірність і час цілеспрямованого досягнення стану S_2 ; p і t – ймовірність (вкрай мала) і час (непередбачуваний і може бути вкрай тривалим) спонтанного переходу із стану S_1 в стан S_2 ; Q – оператор (драйвер, механізм), завдяки якому здійснюється цілеспрямований перехід $S_1 \Rightarrow S_2$; I – інформація (інструкція, управлінське рішення, що включає людські відносини в соціально-економічних середовищах), що організовує роботу драйвера і забезпечує виконання управлінської операції $S_1 \Rightarrow S_2$. В соціально-економічних системах, до яких можна віднести всіх суб'єктів господарювання, виокремлюються відповідно дві підсистеми: 1) та, що здійснює управління, 2) та, що підлягає управлінню. Фактично оператор Q , що належить до першої підсистеми, з інструкцією I обумовлює вид впливу першої, управлінської, підсистеми на другу, підсистему управління. Типові образні приклади таких впливів наведено на рис. 1.

В першому випадку за рахунок адміністративно-розпорядчих важелів управлінський орган (УО) насильницьким шляхом в межах суб'єкт-об'єктних відносин примушує об'єкт (підсистему) управління реалізовувати вигідний для УО план операції $S_1 \Rightarrow S_2$. При спонуканні (стимуляції), завдяки можливим задоволенням соціально-економічних інтересів підсистеми управління, УО реалізує знов-таки вигідний для себе сценарій операції $S_1 \Rightarrow S_2$. Коли ж управлінський орган вибудовує управлінські процеси за рахунок відповідних соціально-психологічних впливів на підсистему, що зазнає ці управлінські впливи, із метою формування в неї мотивацій-переконань на реалізацію операції $S_1 \Rightarrow S_2$, це призводить до одночасного задоволення інтересів майже всіх дійових осіб.



Рис. 1. Змістовна сутність видів управлінського впливу
(авторська розробка)

Останнім часом, в управлінні соціально-економічними системами відпрацьовується модель з умовною назвою «співдружність», в межах котрої операція $S_1 \Rightarrow S_2$ стає результатом *взаємодії* обох підсистем. Таке можливе лише за умов так званого «синергетичного» управління (менеджменту) всіма драйверами досягнення успіху (див., наприклад, публікацію [2]). Зрозуміло, що при такому типі управління в соціально-економічному середовищі (системі) повинна постійно «працювати» певна множина необхідних обернених зв'язків. Актуальність наукових досліджень в цьому напрямку лише посилюється.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Серед відносно ґрунтовних публікацій, що присвячені питанням синергетичного управління соціально-економічними системами у вигляді підприємств, можна відзначити роботи [2; 3]. В монографії [2], як стверджує автор, досліджено актуальні питання теорії і практики управління діяльністю промислових підприємств на основі системно-синергетичної методології. Головним науковим результатом дослідження є обґрунтування теоретико-методологічних положень авторської концепції синергетичного менеджменту і розробка методичного забезпечення вдосконалення системи управління підприємствами на засадах організованої синергії. Все перелічене проаналізовано на сучасній практиці управління підприємствами хімічної промисловості. На жаль, автор цієї публікації в її тексті багатократно описував ситуації, в котрих суть синергії пояснялася

правилом « $2+2=5$ ».

У статті [3] розкриваються особливості системно-синергетичного підходу до формування моделі управління підприємством в умовах ринку. Проілюстровано можливості застосування вказаного підходу до досліджень економічних систем. На основі теоретичного аналізу складних динамічних систем виявлені правила, яких необхідно дотримуватися в дослідженнях підприємства як системи, де присутні процеси самоорганізації. Представлено узагальнену динамічну модель відокремленого (нонсенс!) підприємства в ринковому середовищі. За таких умов пропонується побудувати синергетичне управління в ланцюжку «виробництво/служба збуту» цього підприємства, які в будь-яких обставинах жорстко пов'язані однією цільовою настановою – максимізацією прибутку організації. Остання обставина автоматично забезпечує усталені стани підприємства як системи та стійкість його стаціонарного стану.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується стаття. В згаданих та інших публікаціях навіть не простежуються сліди початкового змісту слова «синергія», введеного в науковий обіг у 1906 році нобелівським лауреатом за 1932 рік, англійським нейрофізіологом Шеррінгтоном Ч. С. для опису кооперативних рухів м'язових систем-антагоністів при управлінні ними з боку мозку [4, с. 116]. Така системна кооперація може додатково прояснюватися таким словом як «взаємосодія». Замість пошуку місць взаємосодії в соціально-економічній системі певні дослідники можливостей синергетичного управління [5] відшуковують фактори, котрі можна призначити на роль «параметру порядку» в процесах самоорганізації [6, с. 267]. Зміст синергетичного управління соціально-економічними системами, яке безпосередньо спирається на нелінійну природу таких систем, міститься насамперед у досягненні системою бажаного сценарію взаємосодії між її елементами. Все це достатньо повно і зрозуміло викладено проф. Колесніковим А.А. з учнями для фізичних (технічних) систем [7]. Але всі їхні здобутки не можуть бути автоматично перенесеними на соціально-

економічні системи, фундаментом яких виступає людина з її здатністю робити вибір.

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є пошук шляхів для повноцінного аналізу особливостей розбудови синергетичного управління соціально-економічними системами.

Виклад основного матеріалу дослідження. Загальновизнаним є погляд на людину як «цеглу», з якої «складено» суспільство. Про роль людини в економічному житті суспільства, як носія виробничої сили, ще писали такі класики-політекономи як В. Петті, А.Сміт, К. Маркс та ін. Так, Адам Сміт, досліджуючи природу і причину багатства народів, таку силу відніс до однієї зі статей залученого у виробництво капіталу, яка складається «... з придбаних і корисних здібностей усіх жителів або членів суспільства. Придбання таких здібностей, враховуючи також утримання їх володаря протягом його виховання, навчання або учнівства, завжди вимагає дійсних витрат, які є основним капіталом, який як би реалізується в його особі. Ці здібності, будучи частиною стану такої особи, разом з тим стають частиною багатства всього суспільства, до якого особа належить.» [8, с.293-295].

Найкоротше та найбільш змістовне визначення поняття «капітал», що надав К. Маркс, можна вилучити з такої його думки [9, с.320]: «...життєвий процес капіталу полягає лише в його русі як самозростаючої вартості». Таким чином, за К. Марксом, капітал – це вартість (цінність), що приносить додаткову вартість; тобто капітал є продукуюча цінність, яка генерує грошові потоки в майбутніх часових періодах.

Стрижнем будь-якого механізму генерації потоку доходів є господарська діяльність людини, в основі якої містяться всі її здібності до такої діяльності.

Професор М. М. Критський висунув тезу про те, що людський капітал є загальною ознакою економічної життєдіяльності [10, с. 4]. На відміну від товару «робоча сила» людський капітал не просто продається і купується, а й авансується, амортизує і відшкодовується як основний капітал, тобто вимагає значних інвестицій і виступає в якості довгострокового капітального ресурсу.

Він здійснює специфічний економічний оборот і круговорот, проходячи відповідні стадії свого відтворення, проявляється в різних функціональних формах, в тому числі інтелектуальних, не властивих звичайній робочій силі (наприклад, силі тварин, залучених до трудового процесу). Ознакою залучення людського капіталу до господарської діяльності є заробляння людиною грошей, частина яких йде на відтворення та розвиток її людського капіталу. Останнє можна сприймати як процес капіталізації суб'єкту господарювання. З цієї причини будь-який суб'єкт соціально-економічного простору може характеризуватися такими узагальненими координатами як його соціально-економічний капітал (в грошовому вимірі) та норма його капіталізації.

Для опису добутків господарської діяльності за ринкових умов будь-якої за розміром соціально-економічної системи можна використати результат аналізу моделі економічної динаміки капіталістичного господарства, що був здобутий відомим вченим М.Д. Кондратьєвим [11, с.412–415]:

$$E = m\sqrt{AK}, \quad (1)$$

де E – дохід за результатами господарювання (у вартісному вимірі), m – показник впливу (акселератор) рівня техніки та технологій (у відносних одиницях) на економічні результати господарювання, A – кількість задіяних у процес господарювання людей (у вартісному вимірі), тобто кількість людського капіталу, який безпосередньо задіяний у «створенні» доходу E , K – ресурсна база господарювання або його основні та обігові засоби (у вартісному вимірі), що іноді зветься господарським капіталом. За формою та змістом вираз (1) нагадує відому двохфакторну виробничу функцію Кобба-Дугласа, яка пов'язує між собою дохід від реалізації продукції, матеріальні (ресурсні) витрати та працевитрати на її виробництво [12]. Носія або власника будь-якого капіталу (A і K) необхідно вважати суб'єктом господарської діяльності при залученні його у процес «генерації» доходу або прибутку, що описується виразом (1) (на доданок до визначень, що надають статті 2 і 3 Господарського кодексу України [12]).

Будь-який проект з господарської діяльності має етап, зміст якого у

запрошенні до участі в ньому, тобто наймі, працівників-виконавців. Володарі (або носії) капіталу K (їх можна назвати підприємцями) в дійсності завжди пропонують різноманітні можливості на участь в проектах з господарської діяльності володарям людського капіталу A , які використовуються в якості працівників. Останні «генерують» попит на пропозиції на участь в проектах підприємців, тобто попит на працевлаштування. Саме тому важливо досліджувати підчас недружні (з-за прагнення до найбільшої капіталізації власних активів) відносини між носіями вказаних капіталів, котрі визначаються динамікою процесів в системі «попит/пропозиція». Базою для дослідження вказаної динаміки повинні виступати ідеї, яким присвячена аналітична (теоретична) механіка (див., наприклад, [13]). Перший етап досліджень, якому присвячена дана публікація, базується на математичному моделюванні як самому безпечному для соціально-економічного середовища. При цьому буде використовуватися припущення, що всі діючі суб'єкти виявляють раціональну поведінку, бо керуються моделлю «людини економічної» [15]. Доцільно визнати, що така ідеалізація моделі є прийнятною на даному етапі досліджень.

Обсяг попиту на працевлаштування (в грошових одиницях), що реалізуються в межах життєдіяльності певної спільноти, будемо позначати виразом A_x , а обсяг пропозиції (в грошових одиницях) - K_y . Надалі буде аналізуватися динаміка попиту та пропозиції не на рівні парної взаємодії суб'єктів господарювання, а на рівні «потоків» цих взаємодій, що далі буде описуватися диференціальними рівняннями.

Припустимо, що є позитивна динаміка у попиту на працевлаштування та пропозиції на неї. За таких умов прирощення попиту ΔA_x за час Δt може бути пропорційним власне попиту, тобто

$$\Delta A_x = \alpha \cdot A_x \cdot \Delta t, \quad (2)$$

де α - відображає швидкість зміни попиту у відносних одиницях; при $\alpha > 0$ попит зростає, а при $\alpha < 0$ він убуває.

Скориставшись граничним переходом $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta t} = \frac{d A_x}{dt} \equiv \dot{A}_x$, можна дійти

до диференційного рівняння

$$\dot{A}_x = \alpha A_x, \quad (3)$$

яке може описувати динаміку попиту на працевлаштування в межах певного підприємницького проекту. Приведемо це рівняння до безрозмірного вигляду, поділивши його на K_Σ – величину, що характеризує "ємність" ринку капіталів (в грошових одиницях), якими володіють члени спільноти, тобто $x = A_x / K_\Sigma$.
Получаємо:

$$\dot{x} = \alpha \cdot x \quad (4)$$

Якщо потреба може бути задоволеною за рахунок участі в різних підприємницьких проектах, то з попитом на участь в певному проекті може конкурувати попит на участь в подібному, близькому за своїми основними характеристиками проекті. Ця конкуренція виявляється у акті зустрічі (зіткнення) потреб на участь в обох проектах, котрий можна описати у вигляді добутку

$$x^{(1)} \cdot x^{(2)}, \quad (5)$$

де $x^{(1)}$ - обсяг попиту (у відносних одиницях) на участь в першому, основному в нашому модельному уявленні проекті, $x^{(2)}$ – обсяг попиту на участь в другому, альтернативному, що конкурує з першим, проекті. В подальшому ці проекти не будемо відрізняти між собою і тому будемо писати

$$x^{(1)} \cdot x^{(2)} \equiv x^2. \quad (6)$$

З урахуванням наведених міркувань запишемо

$$\dot{x} = \alpha \cdot x - \beta \cdot x^2, \quad (7)$$

де β - "ваговий" множник, показник процесу конкуренції попиту на участь в подібних проектах; тут другий доданок у дужках має знак "мінус", тому що процес конкуренції зменшує обсяги попиту на працевлаштування в межах даного підприємницького проекту. Рівняння (7) нагадує відоме з популяційної біофізики рівняння Ферхюльста-Пірла [16, С. 8].

Проаналізуємо тепер питання про те, як пропозиція працевлаштування впливає на його попит.

З одного боку, саме пропозиція породжує попит на працевлаштування (див., наприклад, акційну презентацію підприємницьких проектів), а з іншого, саме реалізована пропозиція зменшує попит, задовольняючи його. Акція має одноразовий характер, пропозиція - довготривалий. Задоволення попиту спостерігається кожного разу при зустрічі попиту на працевлаштування з пропозицією роботодавця. Якщо скористатися "механістичними" уявленнями про взаємодію попиту з пропозицією, то можна припустити, що така взаємодія достатньо часто має випадковий характер, а "частота контактів" повинна бути пропорційною добутку величин попиту та задовольняючої його пропозиції. З урахуванням наведених роздумів вираз (7) можна переписати у вигляді

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \alpha x - xy - \beta x^2 = P(x, y), \quad (8)$$

де $y = E_y / K_\Sigma$.

Розмірковування, що подібні вище наведеним, приводять до рівняння динаміки пропозиції працевлаштування на ринку праці у вигляді:

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt} = -\eta y + xy = Q(x, y), \quad (9)$$

де η - характеризує швидкість зміни пропозиції працевлаштування. Перша складова в правій частині рівняння (9) описує процес знижки пропозиції працевлаштування за відсутністю підприємницьких проектів, а друга - процес зростання пропозиції на ринку праці за рахунок існування на ньому відповідного попиту.

Диференціальні рівняння (8) та (9) у сукупності описують динаміку взаємодії попиту x та пропозиції y працевлаштування на ринку праці, тому їхнє дослідження дозволяє висвітлити можливі сценарії подій на таких ринках.

Будемо далі вважати, що $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – безперервні функції, які визначені на евклідовій площині (x, y) в певній області G (з декартовими координатами $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$), і мають в цій області безперервні похідні порядку не нижче першого. Тим самим задовольняються умови теореми про існування і єдність рішення досліджуваної системи нелінійних

диференціальних рівнянь (8)–(9) [17, с. 13]. Така система називається *автономною динамічною системою другого порядку на площині* [17, С. 12]. Кожному стану системи відповідає пара значень змінних (x, y) . Навпаки, кожній парі змінних (x, y) відповідає певний стан системи, графічним уявленням якого є точка $M(x, y)$ в площині xOy . Ця площа носить назву *фазової площини* і зображає сукупність всіх станів системи [18, С. 77]. Точка $M(x, y)$ називається *зображувальною*. Сукупність точок $M(x(t), y(t))$ на фазовій площині, положення яких відповідає всім можливим станам системи (8)–(9) з часом, називають *фазовою траєкторією*, а сукупність останніх – *фазовим портретом системи* (8)–(9). Побудова фазового портрета дозволяє зробити виводи про характер поведінки змінних x, y без знання аналітичних рішень досліджуваної системи рівнянь (8)–(9).

Слід визнати, що донині не існує регулярних методів інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь в загальному вигляді, а разом з тим і строгих методів побудови фазових портретів досліджуваних нелінійних динамічних систем. Тому для дослідження конкретної динамічної системи часто найбільш простим (а іноді і єдиним) є метод наближеного графічного інтегрування, тобто метод побудови наближеного фазового портрета даної динамічної системи. Найбільш відповідним для цих цілей прийомом наближеного графічного інтегрування є – *метод ізоклін* (ліній рівного нахилу) [19, с. 15; 20, с. 41].

Суть методу ізоклін полягає в наступному. Поведінка системи (8)–(9) після виключення часу t описується одним нелінійним диференціальним рівнянням першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = f(x, y). \quad (10)$$

Криві $f(x, y) = C$ на фазовій площині xOy є геометричній місцем таких точок, через які всі відшукувані інтегральні криві проходять під одним і тим же кутом до осі абсцис, тангенс якого рівний C . Тому криві $f(x, y) = C$ носять

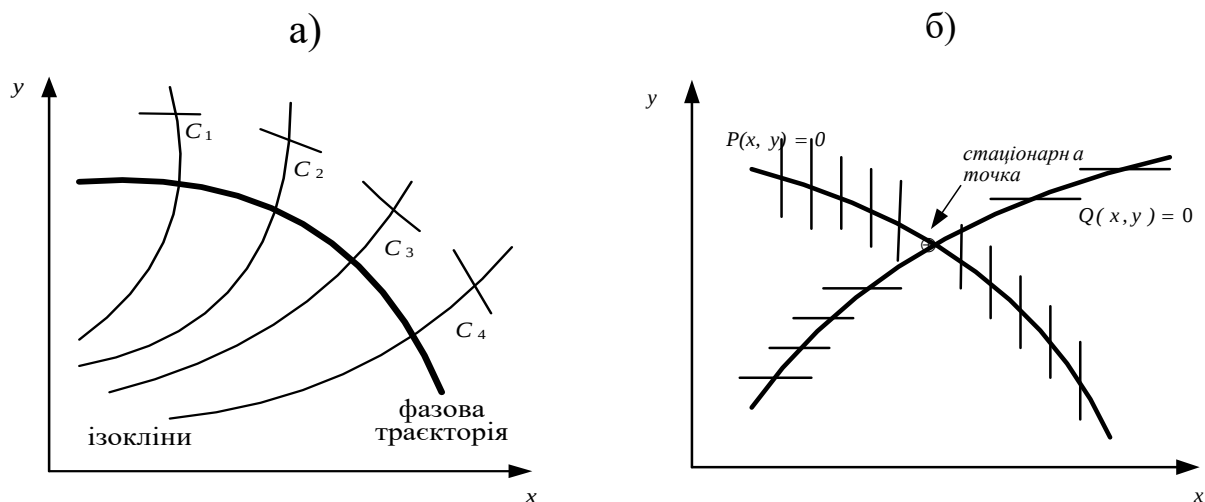
назву ізоклін (див. рис. 2, а). Вираз $f(x,y)=C$ визначає в кожній точці площини xOy єдину дотичну до відповідної інтегральної кривої за винятком точки, де $P(x,y)=0$ і $Q(x,y)=0$, в якій напрям дотичної стає невизначеним, оскільки при цьому стає невизначеним значення похідної

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0, y=y_0} = \frac{Q(x_0, y_0)}{P(x_0, y_0)} = \frac{0}{0}. \quad (11)$$

У цій точці перетинаються всі ізокліни, тому вона – *особлива точка*. У ній одночасно перетворюються в нуль похідні змінних x і y за часом, тобто

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x_0, y_0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x_0, y_0) = 0. \end{aligned} \right\}_{x_0, y_0} \quad (12)$$

Таким чином, в особливій точці швидкості змін змінних дорівнюють нулю. Отже, особлива точка відповідає стаціонарному стану системи (8)–(9), а її координати – суть стаціонарні значення змінних x і y .



**Рис. 2. Ізокліни як інструменти побудови фазових траєкторій (а)
і пошуку особливих точок фазового портрету (б)
(авторська розробка)**

Особливий інтерес представляють головні ізокліни: $dy/dx = 0$, $Q(x,y)=0$ – ізокліна горизонтальних дотичних і $dy/dx = \infty$, $P(x,y)=0$ – ізокліна

вертикальних дотичних.

Побудова головних ізоклін з подальшим знаходженням точки їхнього перетину, координати якої задовольняють умовам: $P(x_0, y_0) = 0$ і $Q(x_0, y_0) = 0$, дозволяє знайти точку перетину всіх ізоклін фазової площини, в якій напрями дотичних до фазових траєкторій невизначені. Це – особлива точка, яка відповідає стаціонарному стану системи (див. рис. 2,б). Система (8)–(9) володіє стількома стаціонарними станами, скільки точок перетину головних ізоклін є на фазовій площині.

Одним з центральних питань якісного дослідження динамічних систем є питання про стійкість особливих точок. Відповідь залежить від того, піде чи ні зображувальна точка при малому відхиленні від стаціонарного стану. Стосовно системи типу (8)–(9) визначення стійкості на мові малих відхилень ε, δ виглядає так: стан рівноваги стійкий, якщо для будь-якої заданої області відхилень від рівноваги (ε) можна вказати область, що оточує стан рівноваги і що володіє тією властивістю, що жодна траєкторія, яка починається усередині області, ніколи не досягне межі ε (див. рис. 3).

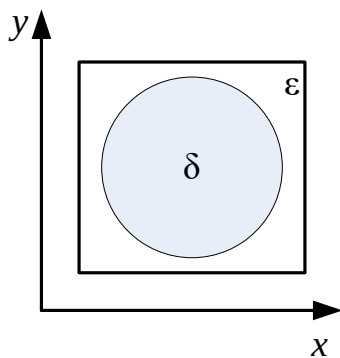


Рис. 3. Ілюстрація до визначення стійкості особливої точки
(авторська розробка)

Для так званих «грубих систем», характер поведінки яких не міняється при малій зміні виду рівнянь, інформацію про тип поведінки в околі стаціонарного стану можна отримати, досліджуючи не початкову, а спрощену, лінеаризовану систему. В цьому випадку система (8)–(9) трансформується до вигляду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Тут a, b, c, d – константи.

Загальне вирішення такої системи шукатимемо у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} x &= Ae^{\lambda \cdot t}, \\ y &= Be^{\lambda \cdot t}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Підставляючи вирази (14) в систему (13) і скорочуючи на $e^{\lambda \cdot t}$, приходимо до алгебраїчної системи другого порядку:

$$\left. \begin{aligned} \lambda A &= aA + bB, \\ \lambda B &= cA + dB. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Система (15) з невідомими A і B має рішення, якщо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (16)$$

має корені

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}{4}}. \quad (17)$$

У літературі, присвяченій якісному дослідженню динамічних систем на площині, характеристичне рівняння приводять до вигляду [17, С.68]:

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0, \quad (18)$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}, \quad (19)$$

$$\sigma = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0), \quad (20)$$

$P'_x(x_0, y_0)$, $P'_y(x_0, y_0)$, $Q'_x(x_0, y_0)$, $Q'_y(x_0, y_0)$ – значення частинних похідних по x та y в стаціонарній точці (x_0, y_0) .

Щоб знайти стаціонарні точки на фазовому портреті системи (8)–(9), прирівнюємо до нуля праві частини цих рівнянь, тобто

$$\left. \begin{aligned} x_0(\alpha - y_0 - \beta \cdot x_0) &= 0, \\ y_0(x_0 - \eta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Найпростішою стаціонарною точкою на фазовому портреті досліджуваної динамічної системи є точка початку координат. Інші точки визначаються системою рівнянь

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \alpha - \beta \cdot x_0, \\ x_0 &= \eta, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

графічний портрет котрої наведено на рис. 4.

Отже, можна зробити висновок, що на фазовому портреті динамічної системи, описуваної рівняннями (8)–(9), є такі стаціонарні точки: $O(0; 0)$, $A(\eta; \alpha - \beta\eta)$ та $B(\alpha/\beta; 0)$. Щоб встановити з позицій стійкості/нестійкості тип цих точок, знайдемо часткові похідні

$$\left. \begin{aligned} P'_x(\bar{x}, \bar{y}) &= \alpha - \bar{y} - 2\beta \cdot \bar{x}; & P'_y(\bar{x}, \bar{y}) &= -\bar{x}; \\ Q'_x(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{y}; & Q'_y(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{x} - \eta. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

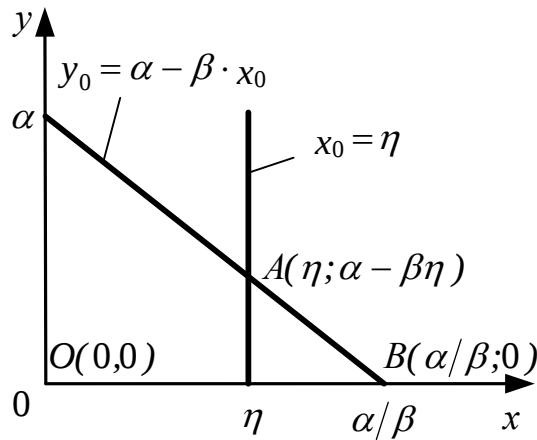


Рис. 4. Графічний портрет системи (22)

(авторська розробка)

В точці $O(0;0)$: $P'_x = \alpha$, $P'_y = 0$, $Q'_x = 0$, $Q'_y = -\eta$, $\Delta = -\alpha\eta < 0$, $\sigma = \alpha - \eta$, $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\eta$. Внаслідок того, що $\Delta < 0$, а корені характеристичного рівняння – дійсні та з різними знаками, стаціонарна точка $O(0;0)$ досліджуваного фазового портрета належить до типу "сідло" [17, с. 68], тобто є точкою нестійкої рівноваги (див. рис. 5).

Для точки $A(\eta; \alpha - \beta\eta)$ обчислення дають: $P'_x = -\beta\eta$, $P'_y = -\eta$, $Q'_x = \alpha - \beta\eta$, $Q'_y = 0$, $\Delta = \eta(\alpha - \beta\eta) > 0$, $\sigma = -\beta\eta \neq 0$, $\sigma^2 - 4\Delta < 0$, $\lambda_1 = \vartheta + i\theta$, $\lambda_2 = \vartheta - i\theta$, $\vartheta = -\beta\eta/2$, $\theta = \sqrt{(\beta^2\eta^2 + 4\beta\eta^2 - 4\alpha\eta)/4}$. Згідно з викладеною вище теорією дослідження стаціонарних точок нелінійних динамічних систем на площині, точка $A(\eta; \alpha - \beta\eta)$ досліджуваного фазового портрета належить до типу "стійкий фокус" [17, с. 69], тому що $\Delta > 0$, корені характеристичного рівняння комплексно-супряжені, у яких $Re \lambda_{1,2} = \vartheta = -\beta\eta/2 < 0$ (див. рис. 5).

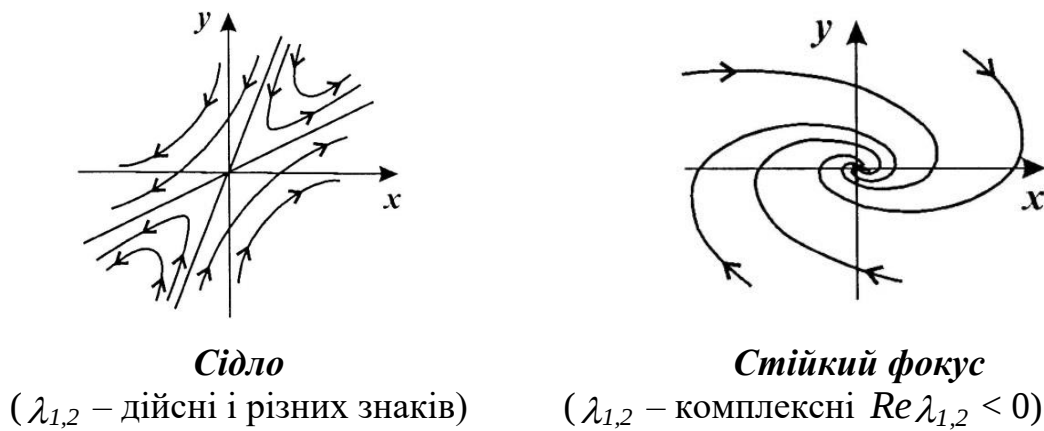


Рис. 5. Типи фазових портретів в околах стаціонарного стану
(авторська розробка)

Для стаціонарної точки $B(\alpha/\beta; 0)$ знаходимо: $P'_x = -\alpha$, $P'_y = -\alpha/\beta$, $Q'_x = 0$, $Q'_y = (\alpha - \beta\eta)/\beta$, $\Delta = \alpha[\eta - (\alpha/\beta)] < 0$ (при $\alpha \geq \beta$), $\sigma = (\alpha/\beta) - \alpha - \beta$, $\lambda_{1,2} = \frac{[(\alpha/\beta) - \alpha - \beta]}{2} \pm \sqrt{\frac{[(\alpha/\beta) - \alpha - \beta]^2}{4} + \alpha\left(\frac{\alpha}{\beta} - \eta\right)}$. Оскільки $\Delta < 0$, а корені характеристичного рівняння дійсні й різних знаків, ця точка належить до типу "сідло", тобто є точкою нестійкої рівноваги.

Цей аналіз знаходить своє підтвердження в результатах візуалізації фазового портрета динамічної системи (8)–(9), що отримані за допомогою

програми «Flow of a Vector Field in 2D» з пакета комп'ютерної математики "Matematica 7" [21] в припущенні, що $\alpha = 0,3$; $\beta = 0,3$; $\eta = 0,4$, (див. рис. 6).

Топологія фазових траєкторій на рис. 6 вказує на те, що точки $(0; 0)$ і $(1; 0)$ є сідловими, а точка $(0,4; 0,18)$ - стійким фокусом. Цей результат цілком корелює з даними на рис. 4 при $\alpha = 0,3$; $\beta = 0,3$; $\eta = 0,4$ та рис. 5. Аналіз розміщеного на рис. 6 фазового портрету в конкуруючому (бо всі дійові особи прагнуть досягти максимально великої власної капіталізації) просторі «попит/пропозиція» свідчить, що сталий стан рівноваги при $x_0 = 0,4$ та $y_0 = 0,18$ досягається за немалий відрізок часу (зображаюча точка на фазовому портреті може зробити багато обертів, перш ніж потрапить в точку стійкого фокуса). Всі учасники процесу «платять» за це коливанням норми капіталізації, тобто зниженням ефективності діяльності як особисто, так і в сукупності [1].

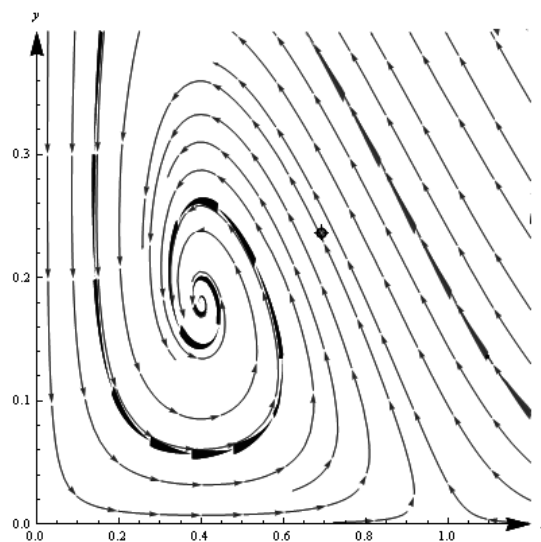


Рис. 6. Фазовий портрет динамічної системи (8)–(9)

(авторська розробка)

Щоб знівелювати зазначені недоліки доцільно застосувати надбання синергетичної теорії управління [7]. Це потребує «вбудовування» в динамічну систему «попит/ пропозиція» внутрішньо узгодженого з нею управління. Воно повинно стати частиною цієї системи, розширюючи її до системи «попит/пропозиція+управління», і забезпечувати в ній зворотний зв'язок з

метою корекції руху системи до бажаного результату. Таке завдання означає накладення нового, додаткового зв'язку між змінними системи, знижуючи тим самим розмірність системного простору. Керуючий вплив має бути «безсиловим», спрямованим на найбільш «чутливі» компоненти нелінійної динамічної системи. Він повинен торкнутися в першу чергу динаміки зміни пропозиції на місцевому (регіональному) ринку праці. Внаслідок цього математична модель системи «попит/пропозиція» трансформується до виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \alpha \cdot x - x \cdot y - \beta \cdot x^2, \\ \dot{y} &= -\eta \cdot y + x \cdot y + u(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

де $u(x, y)$ – закон управління, який далі буде синтезований за допомогою процедур аналітичного конструювання нелінійних агрегованих регуляторів (АКАР) по заданим інваріантним різноманіттям [7, С.49], котрі уявляють з себе систему обернених зв'язків, які забезпечують виникнення в фазовому просторі когерентного колективного руху, тобто спрямованої самоорганізації. При цьому реалізується принцип «розширення–стиснення» фазового простору [7, с. 73–90].

Для синтезу нелінійних агрегованих регуляторів введемо агреговану макрозмінну [7, С.119-123]

$$\psi(x, y) = \omega \cdot y - \mu \cdot x, \quad (25)$$

котра характеризує силу взаємовпливу між попитом x і пропозицією y на регіональному ринку праці. За своєю структурою $\psi(x, y)$ є лінійна комбінація рівнів попиту x і пропозиції y , а співмножники ω і μ є показниками несилового (наприклад, інформаційного) впливу власне управління на ринкову кон'юнктуру. Зростання $\psi(x, y)$ обумовлено зростанням y і/або зменшенням x , тобто дефіцитом відповідних претендентів на робочі місця в регіоні.

Вимагатимемо, щоб $\psi(x, y)$ задовольняла диференційному рівнянню

$$T\dot{\psi}(t) + \psi = 0, \quad (26)$$

де T – час, за який у досліджуваній системі відбудуться усі перехідні процеси, він $T > 0$; $\phi(\psi) = \psi$ і тому $\phi(\psi) \cdot \psi = \psi^2 > 0$ при будь-яких ψ . Тут рівняння (26)

є рівнянням Ейлера-Лагранжа відносно стійких екстремалей, що доставляють мінімум для так званого супроводжуючого оптимізаційного функціонала (СОФ) уздовж траєкторії системи (24) [7, С. 58] Тим самим задовольняється умова стійкого досягнення запланованого результату.

Підставляючи вираз (25) в рівняння (26) і враховуючи (24), отримуємо

$$u(x, y) = \frac{\mu}{\omega} \left(\frac{1}{T} + \alpha - y - \beta \cdot x \right) \cdot x - \left(\frac{1}{T} - \eta + x \right) \cdot y. \quad (27)$$

Цей закон управління переводить зображаючу точку системи (24) в найближчу околицю різноманіття (або атрактора) $\psi = 0$, рух уздовж котрого описується диференціальним рівнянням

$$\dot{x}_\psi = x_\psi \left[\alpha - \left(\beta + \frac{\mu}{\omega} \right) x_\psi \right]. \quad (28)$$

Рівняння (28) за своїм змістом є логістичним [16, С.8] і визначає бажаний соціумом рівень попиту на працю в регіоні

$$x_\psi = \frac{\alpha \cdot \omega}{\beta \cdot \omega + \mu}. \quad (29)$$

Цей рівень визначається як показниками (α і β) попиту на регіональних ринках праці, який існував до використання управління, так і показниками (ω і μ) впливу власне управління на ринкову кон'юнктуру. При цьому пропозиція праці може становити

$$y_\psi = \frac{\alpha \cdot \mu}{\beta \cdot \omega + \mu}. \quad (30)$$

При перерахованих умовах математична модель (24) системи «попит/пропозиція + управління» перетвориться до виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \alpha \cdot x - x \cdot y - \beta \cdot x^2; \\ \dot{y} &= \frac{\mu}{\omega} \left[\left(\alpha + \frac{1}{T} \right) x - xy - \beta x^2 \right] - \frac{1}{T} y \end{aligned} \right\}. \quad (31)$$

Фазовий портрет системи (31) при $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,3$, $\mu = 0,1$, $\omega = 0,1$ та $T = 1$ наведено на рисунку 7,а.

При використанні агрегованої макрозмінної виду

$$\psi(x,y) = \omega \cdot y + \mu \cdot x, \quad (32)$$

математична модель (24) системи «попит/пропозиція + управління» перетвориться до виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \alpha \cdot x - x \cdot y - \beta \cdot x^2; \\ \dot{y} &= \frac{\mu}{\omega} \left[yx + \beta x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{T} \right) x \right] + \left(2x - \frac{1}{T} \right) y \end{aligned} \right\}. \quad (33)$$

Фазовий портрет цієї системи при $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,3$, $\mu = 0,1$, $\omega = 0,1$ та $T = 1$ наведено на рисунку 7,б.

Фазовий портрет на рис. 7,а свідчить, що фазові траєкторії «організовано йдуть» до різноманіття (атрактора), на якому міститься точка рівноваги попиту з пропозицією (0,23; 0,23), координати якої легко розраховуються за формулами (29) і (30). У цій самоорганізації і проявляється синергетичний ефект від запропонованого управління.

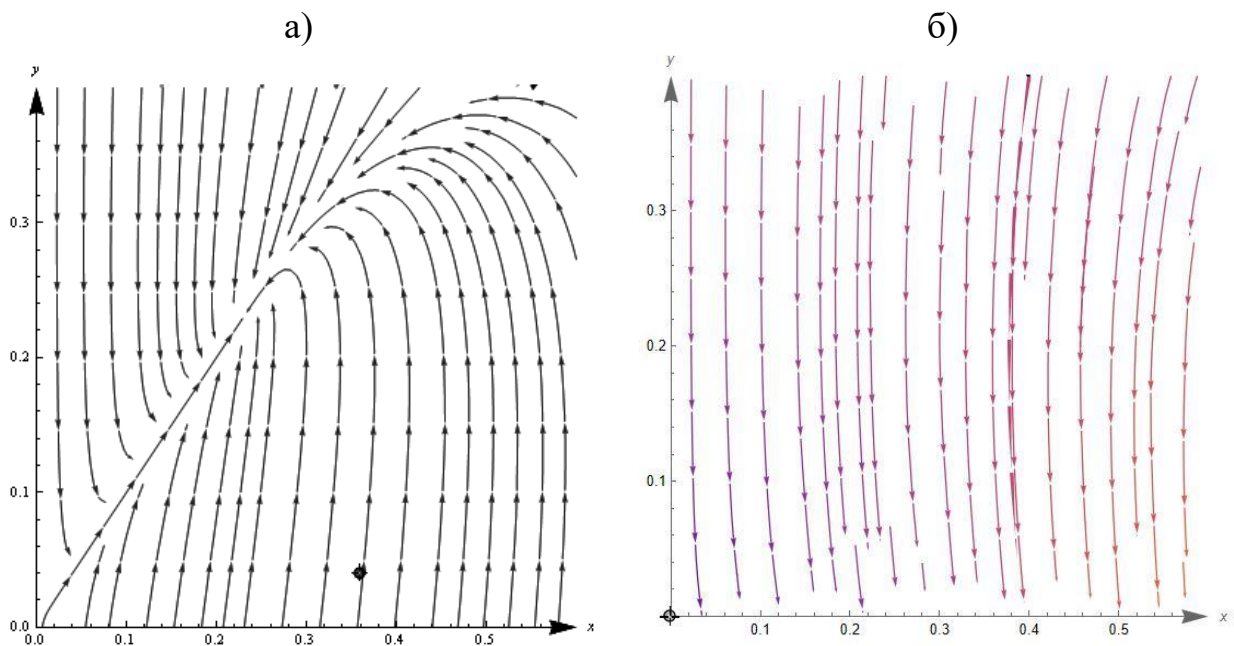


Рис. 7. Фазові портрети: а) системи (31), б) системи (33);

при $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,3$, $\mu = 0,1$, $\omega = 0,1$ та $T = 1$

(авторська розробка)

З будь-якого стану система «попит/пропозиція + управління» обов'язково прийде на різноманіття, яке притягує (атрактор), за яким «скотиться» в точку рівноваги. На аттракторі реалізується процес редукції (зменшення) надлишкових ступенів свободи початкової системи «попит – пропозиція», що становить зміст основного завдання для синергетичного управління складними системами будь-якого походження.

Фазовий портрет на рис. 7,б свідчить про відсутність самоорганізації. Управління $u(x, y)$ тут, ймовірно за все, не забезпечило виводу системи (24) на потрібний аттрактор, при якому виникають в системі «попит/пропозиція + управління» когерентні дії всіх причетних до неї суб'єктів.

Якщо відмовитися від використання припущення, що всі діючі суб'єкти виявляють раціональну поведінку, доцільно доповнити систему (8)–(9) ще однією змінною z , що характеризує рівень знань (інформованості) у суб'єктів господарювання. Оновлена система може мати, наприклад, вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha \cdot x - x \cdot y - \beta \cdot x^2 + \theta \cdot x \cdot z; \\ \dot{y} = -\eta \cdot y + x \cdot y + \nu \cdot y \cdot z; \\ \dot{z} = -\gamma \cdot z + \kappa \cdot x \cdot z + \chi \cdot y \cdot z + \pi \cdot x \cdot y \cdot z. \end{cases} \quad (34)$$

Огляд спеціальної фахової літератури свідчить, що аналіз подібних нелінійних систем в рази складніший за наведений вище [22].

Висновки та перспективи подальших розвідок у даному напрямі.

Викладене вище дозволяє зробити наступні висновки: (1) треба зауважити, що математичне моделювання є найбезпечнішим видом будь яких досліджень соціально-економічних середовищ; (2) в опублікованих дослідженнях питань з синергетичного управління соціально-економічними системами, які нелінійні за своєю суттю, не формується завдання на досягнення бажаного сценарію взаємодії між елементами-антагоністами системи; (3) таке управління повинне бути ненасильницьким і тому заснованим на вигідному використанні природної суті процесів в самій системі, які треба попередньо досконально вивчати і фіксувати, наприклад, у вигляді фазових портретів; (4) результати управління, що претендує на звання синергетичного, повинні мати доказову

базу у вигляді відповідного фазового портрету; (5) з-за відсутності якихось узагальнених методів побудови макрозмінних, що потім забезпечують створення бажаних атракторів за рахунок редукції надлишкових ступенів свободи в системі, що підлягає управлінню, дуже важко сподіватися, що воно насправді буде синергетичним; (6) завдання створити таке управління непомірно ускладнюється, якщо треба враховувати широкий спектр уподобань при прийнятті управлінських рішень власниками і носіями «працюючого» на соціально-економічний результат капіталу.

В подальшому доцільно провести дослідження при відмові від припущення, що всі діючі суб'єкти виявляють раціональну поведінку.

Література

1. Серіков А.В. Капіталізація як узагальнювальна ознака ефективності господарської діяльності за ринкових умов. *Ефективна економіка*. 2023. № 6. [Електронний ресурс]. URL: <https://nauka.com.ua/index.php/ee/article/view/1699/1712> (дата звернення: 14.11.2023 р.).
2. Шевцова Г.З. Синергетичний менеджмент підприємств: монографія. / НАН України, Ін-т економіки пром-сті. Київ, 2016. 454 с.
3. Заковоротный В.Л., Флек М.Б., Угнич Е.А. Модель управления современным предприятием на основе системно-синергетического подхода. *Экономическая наука современной России*. 2016. № 4(75). С. 112 – 128. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/model-upravleniya-sovremennym-predpriyatiem-na-osnove-sistemnosinergeticheskogo-podhoda> (дата звернення: 14.11.2023).
4. Шеррингтон Ч.С. Интегративная деятельность нервной системы. Монография. / пер. с англ. Ленинград: Наука, 1969. 392 с.
5. Варення Г.А. Впровадження синергетичного підходу в управлінні працезохоронною діяльністю підприємства поштового зв'язку: автореф. дис. ... канд. екон. наук: 08.00.04. Одеса, 2011. 20 с.
6. Хакен Г. Синергетика. / пер. с англ. М.: Мир, 1980. 406 с.

7. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами: Теория системного синтеза. М.: КомКнига, 2006. 240 с.
8. Смит А. Исследование о природе и причинах богатства народов. / Пер. с англ. М.: Эксмо, 2007. 960 с.
9. Маркс К. Капитал. Критика политической экономии (Предисл. Ф. Энгельса. Пер. И.И. Скворцова-Степанова). Т.1. Кн. 1. Процесс производства капитала. М.: Политиздат, 1973. VIII, 907 с.
10. Критский М.М. Человеческий капитал. Л.: Изд-во ЛГУ, 1991. 120 с.
11. Кондратьев Н.Д. Проблемы экономической динамики М.: Экономика, 1989. 560 с.
12. Господарський кодекс України : Закон України від 16.01.2003 № 436-IV. Відомості Верховної Ради України. 2003. № 18, № 19-20, № 21-22, Ст. 144. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/436-15#Text> (дата звернення: 14.11.2023 р.).
13. Чижевська М.Б., Щербініна С.А., Красун Я.А. Застосування виробничої функції для аналізу діяльності промислового підприємства. *Ефективна економіка*. 2022. № 1. [Електронний ресурс] URL: <http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=9905> (дата звернення: 03.11.2023).
14. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т.2. Ч.2. Динамика систем с конечным числом степеней свободы. / пер. с итал. М.: Издательство иностранной литературы, 1951. 556 с.
15. Яковенко Р.В., Бобочка Т.В., Линченко М.Д. «Людина економічна» та її еволюція.. *Наукові праці Кіровоградського національного технічного університету. Економічні науки*. 2015. Вип. 27. С. 129 – 137.
16. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985. 182 с.
17. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 448 с.
18. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: КД «ЛИБРОКОМ», 2009. 312 с

19. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. /пер. с англ. М.: Мир, 1986. 243 с.
20. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
21. Дьяконов В.П. Mathematica 5.1/5.2/6 в математических и научно-технических расчетах. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008. 744 с
22. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 320с.

References

1. Sierikov, A.V. (2023), “Capitalisation as a generalised indicator of the efficiency of economic activity under market conditions”. *Efektivna ekonomika*. № 6. [Online], available at: <https://nayka.com.ua/index.php/ee/article/view/1699/1712> (Accessed: 14 November 2023).
2. Shevtsova, H.Z. (2016), Synerhetychnyi menedzhment pidpriemstv: monohrafiia. [Synergistic management of enterprises: a monograph], NAN Ukrainy, In-t ekonomiky prom-sti., Kyiv, Ukraine
3. Zakovorotnyiy, V.L., Flek, M.B. and Ugnich, E.A. (2016), “Model of modern enterprise management on the basis of system-synergetic approach”. *Ekonomicheskaya nauka sovremennoy Rossii*, vol. 4(75), pp. 112 – 128, available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/model-upravleniya-sovremennym-predpriyatiem-na-osnove-sistemnosinergeticheskogo-podhoda> (Accessed 14 November 2023)
4. Sherrington, Ch.S. (1969), *Integrativnaya deyatel'nost' nervnoy sistemyi. Monografiya* [Integrative activity of the nervous system], Nauka, Leningrad, Russia
5. Varennia H.A. (2011), “Implementation of a synergistic approach to managing labour protection activities of a postal service enterprise”, PhD. Thesis, Economics and business management, O.S. Popov Odesa National Academy of Communications, Odesa, Ukraine.

6. Haken, G. (1980), *Sinergetika* [Synergetics], Mir, Moscow, Russia
7. Kolesnikov, A.A. (2006), *Sinergeticheskie metodyi upravleniya slozhnyimi sistemami: Teoriya sistemnogo sinteza*. [Synergetic methods of management of complex systems: System synthesis theory], KomKniga, Moscow, Russia
8. Smit, A. (2007), *Issledovanie o prirode i prichinah bogatstva narodov. / per. s angl.* [A study of the nature and causes of the wealth of nations.], Eksmo, Moscow, Russia
9. Marks, K. (1973), *Kapital. Kritika politicheskoy ekonomii (Predisl. F. Engelsa. Per. I.I. Skvortsova-Stepanova), T.1. Kn. 1. Protsess proizvodstva kapitala*. [A critique of political economy. Volume 1. Book 1. The process of production of capital], Politizdat, Moscow, Russia
10. Kritskiy, M.M. (1991), *Chelovecheskiy kapital*. [Human capital], Izd-vo LGU, Leningrad, Russia
11. Kondratev, N.D. (1989), *Problemyi ekonomicheskoy dinamiki*. [Problems of economic dynamics], Ekonomika, Moscow, Russia
12. The Verkhovna Rada of Ukraine (2003), "Commercial Code of Ukraine", available at: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/436-15#Text> (Accessed 14 November 2023).
13. Chyzhevskaya, M.B., Shcherbinina, S.A. and Krasun, Ya.A. (2022), "Application of the production function to analyse the activities of an industrial enterprise", *Efektivna ekonomika*, [Online], available at: <http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=9905> (Accessed: 03 November 2023).
14. Levi-Chivita, T. and Amaldi, U. (1951), *Kurs teoreticheskoy mehaniki. T.2. Ch.2. Dinamika sistem s konechnym chislom stepeney svobodyi* [Course of Theoretical Mechanics. Volume 2. Part 2. Dynamics of systems with a finite number of degrees of freedom], Izdatelstvo inostrannoy literatury, Moscow, Russia
15. Yakovenko, R.V., Bobochka, T.V. and Lynchenko, M.D. (2015), "Economic man" and his evolution", *Naukovi pratsi Kirovohradskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu. Ekonomichni nauky*, Vol. 27, pp. 129 – 137.

16. Bazyikin, A.D. (1985), *Matematicheskaya biofizika vzaimodeystvuyuschih populyatsiy*. [Mathematical biophysics of interacting populations], Nauka, Moscow, Russia
17. Bautin, N.N. and Leontovich, E.A. (1990), *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti*. [Methods and techniques for qualitative study of dynamic systems in the plane], Nauka, Moscow, Russia
18. Malinetskiy, G.G. (2009), *Matematicheskie osnovy sinergetiki: Haos, struktury, vychislitelnyy eksperiment*. [Mathematical Foundations of Synergetics: Chaos, Structures, Computational Experimentation], KD «LIBROKOM», Moscow, Russia
19. Errousmi, D. and Pless, K. (1986), *Obyiknovennyye differentsialnyye uravneniya. Kachestvennaya teoriya s prilozheniyami*. [Ordinary differential equations. Qualitative theory with applications], Mir, Moscow, Russia
20. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I. and Mayer A.G. (1996), *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka*. [Qualitative theory of dynamical systems of the second order], Nauka, Moscow, Russia
21. Dyakonov V.P. (2008), *Mathematica 5.1/5.2/6 v matematicheskikh i nauchno-tehnicheskikh raschetakh. Izd. 2-e, pererab. i dop.* [Mathematica 5.1/5.2/6 in mathematical and scientific and technical calculations], SOLON-PRESS, Moscow, Russia
22. Magnitskiy N.A. and Sidorov S.V. (2004), *Novyye metody haoticheskoy dinamiki*. [New methods of chaotic dynamics], Editorial URSS, Moscow, Russia

Стаття надійшла до редакції 14.11.2023 р.